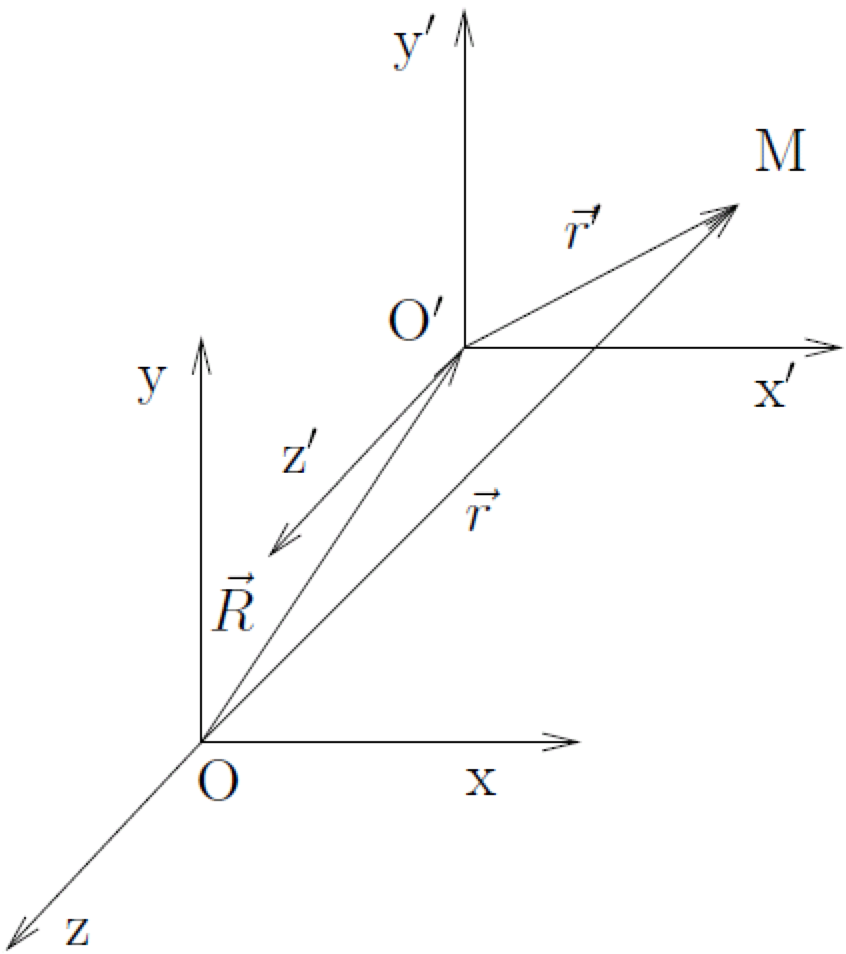
Opakování - Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě

- kartézská soustava souřadnic *S*: *x*, *y*, *z*
- pohybující se kartézská soustava *S'*: *x'*, *y'*, *z'*



- pohyb hmotného bodu M v **inerciální soustavě**, **Gallileova transformace**:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u}t, \quad \vec{u} = konst$$

- rychlost hmotného bodu M:

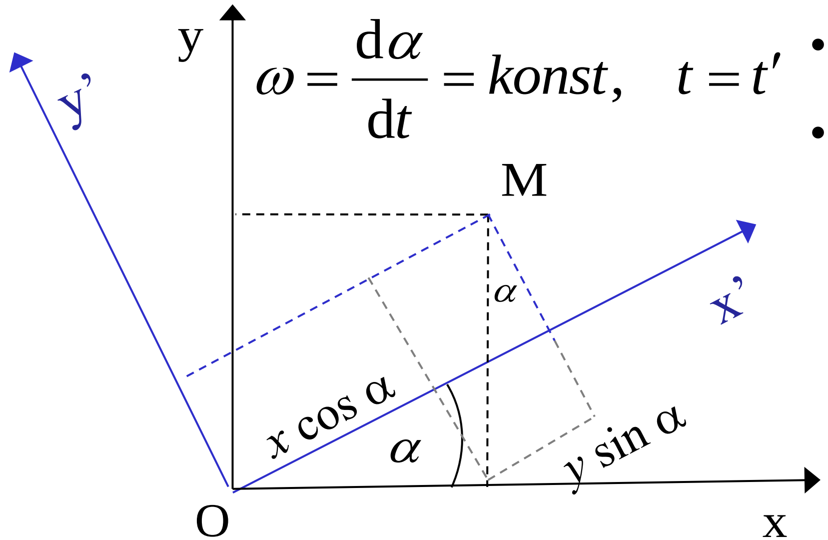
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

- Jelikož je vzájemná rychlost soustav konstantní, budou zrychlení v obou soustavách stejná:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}\,'$$

Opakování - Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

- kartézská soustava souřadnic: *x*, *y*, *z*
- kartézská soustava otáčející kolem osy *z*= *z'*: *x'*, *y'*, *z'*

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$z' = z$$

$$\omega = -\omega'$$

$$v'_x = v_x \cos\omega t + v_y \sin\omega t - \omega' y'$$

$$v'_y = -v_x \sin\omega t + v_y \cos\omega t + \omega' x'$$

$$v'_z = v_z$$

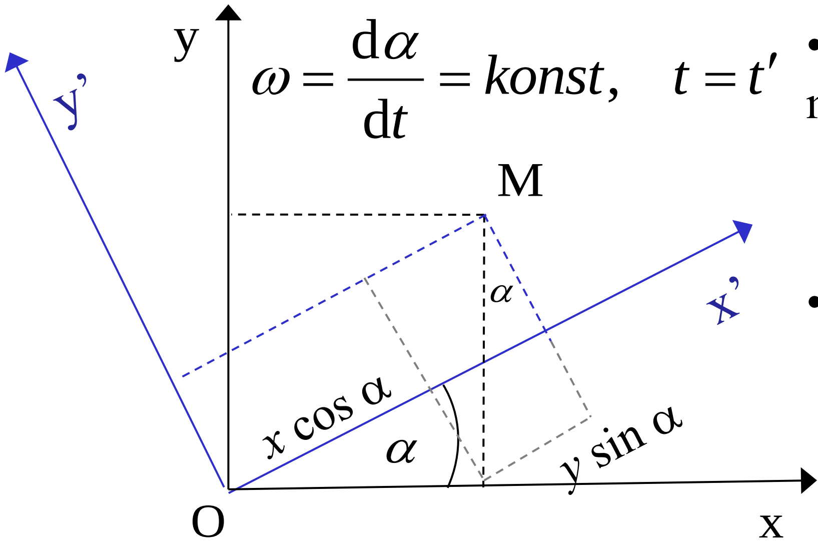
$$a'_x = a_x \cos\omega t + a_y \sin\omega t - 2\omega' v'_y + \omega'^2 x'$$

$$a'_y = -a_x \sin\omega t + a_y \cos\omega t + 2\omega' v'_x + \omega'^2 y'$$

$$a'_z = a_z$$

- složky odstředivého zrychlení: $\vec{a}_O = \left(\omega'^2 x', \omega'^2 y', 0\right)$
- složky Coriolisova zrychlení: $\vec{a}_C = \left(-2\omega' v'_y, 2\omega' v'_x, 0\right)$

Opakování - Pohyb hmotného bodu v rotující soustavě souřadné



$$\omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = konst, \quad t = t'$$

• obecnou rotaci kolem libovolně orientované osy můžeme získat složením tří rotací kolem souřadných os.

$$\vec{\omega}' = \left(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z\right)$$

• Coriolisovo zrychlení při rotaci kolem obecné osy:

$$\vec{a}_C = 2\left(\vec{\omega}' \times \vec{v}'\right) = -2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}'\right)$$

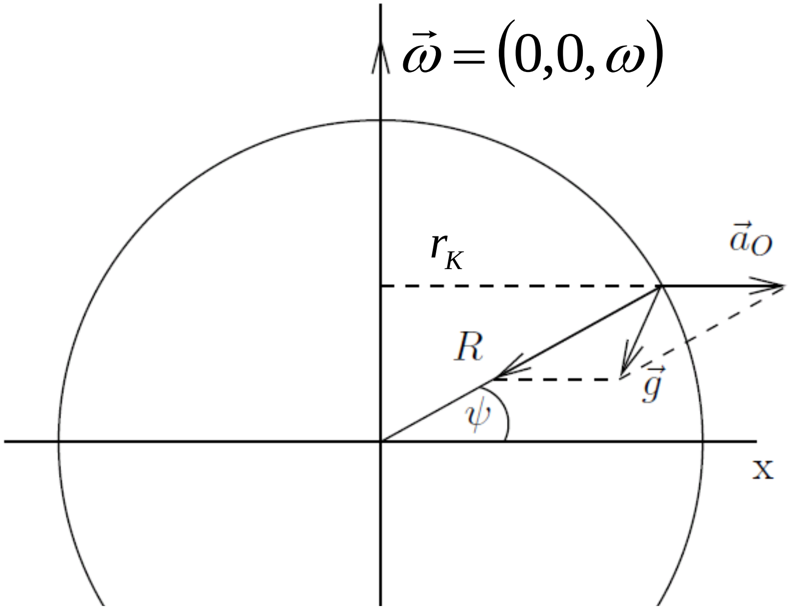
• Coriolisovo zrychlení je tedy kolmé jak na vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}'$ (směr rotační osy), tak na rychlost hmotného bodu $\vec{v}'$ v rotující soustavě souřadné.

• Odstředivé zrychlení při rotaci kolem obecné osy: $\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$

• Velikost odstředivého zrychlení:
r_K je vzdálenost bodu od osy rotace

$$a_O = \omega^2 r \sin\beta = \omega^2 r_K$$

Pohyb na zemském povrchu



$$T = 24 \times 60 \times 60 s = 86400\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\text{s}$$

- Souřadnou soustavu spojenou se Zemí považujeme přibližně za inerciální soustavu.

$$\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \qquad a_O = \omega^2 r_K = \omega^2 R \cos\psi$$

- rotace kolem vlastní osy se stálou úhlovou rychlostí ω=7,272.10^{-5} s^{-1}

$$\text{Země}: R = 6{,}373 \cdot 10^6\,\text{m}$$

$$\text{Praha}: \psi = 50°05' \Rightarrow \cos\psi = 0.6417$$

$$\Rightarrow a_O = \omega^2 R \cos\psi = 0{,}0216\,\text{ms}^{-2} = 0{,}\,0022\,g$$

- Normální tíhové zrychlení:

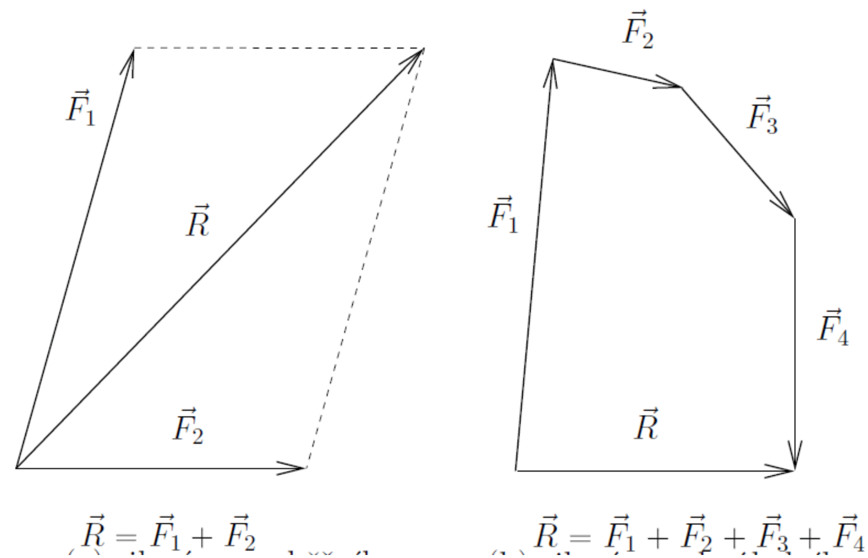
$$g_n = 9{,}80665\,\text{ms}^{-2}$$

- Odstředivéhé zrychlení se skládá s gravitačním zrychlením ve výsledné tíhové zrychlení, které nemíří do středu Země.
- Země, když byla v plastickém stavu nabyla tvaru elipsoidu zploštělého na pólech, takže tíhové zrychlení je všude kolmé k povrchu Země.

Dynamika hmotného bodu, hybnost, síla

Galileův princip relativity: Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách, které jsou navzájem v klidu, nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu v tzv. inerciálních souřadných soustavách

Míra posuvného pohybu tělesa - **hybnost:**



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

hmotnost tělesa　　rychlost hmotného středu tělesa

Proč se tělesa (hmotné body) pohybují?

Pojem síly je dán osobní zkušeností. Síla může mít buď statický (deformační) nebo dynamický účinek (mění pohybový stav těles) .

Síly jsou vektory, mají tedy své působiště a směr. Síla působící na hmotný bod je vektorem vázaným na bod.

Newtonovy zákony

1. Zákon setrvačnosti: Těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu pokud není nuceno vnějšími silami tento svůj stav změnit.

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Zákon síly: Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

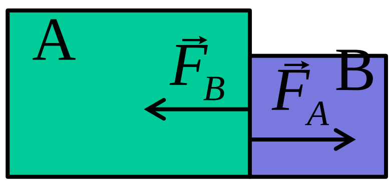
$$\vec{F} = k\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

Kde k je konstanta v soustavě jednotek SI je k =1.
Pokud je hmotnost konstantní ,$v \ll c$ $\Rightarrow$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

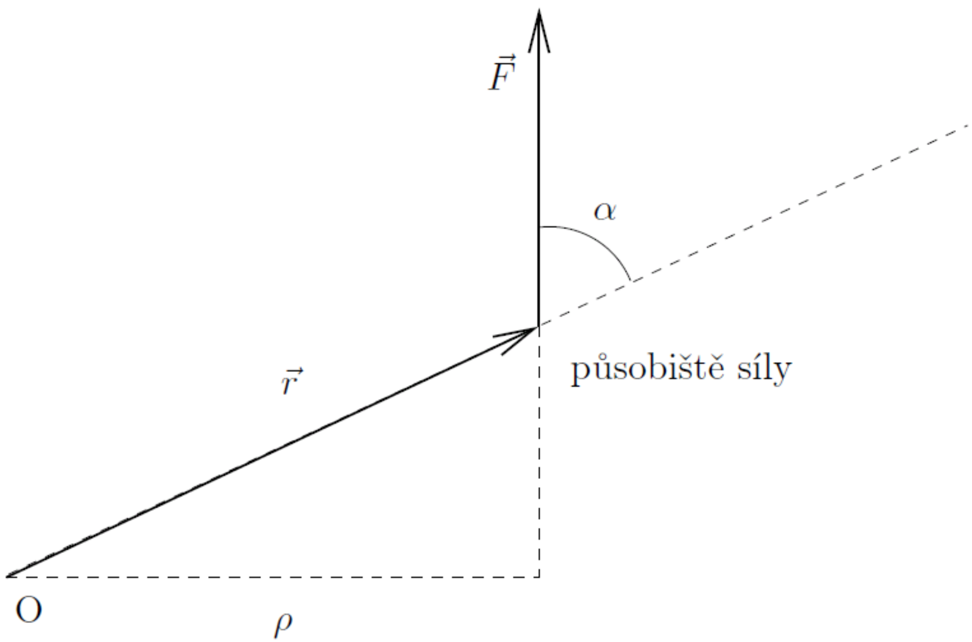
3. Zákon akce a reakce: Každá akce vyvolává reakci opačného směru.Vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$



Všechny Newtonovy zákony se vztahují na pohyby těles v absolutním čase a prostoru

Newtonovy zákony, moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

Moment síly: $$\vec{M} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Jeho velikost je rovna: $M = rF \sin \alpha = F\rho$

Moment hybnosti: $$\vec{b} \equiv \left[\vec{r} \times \vec{p}\right]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

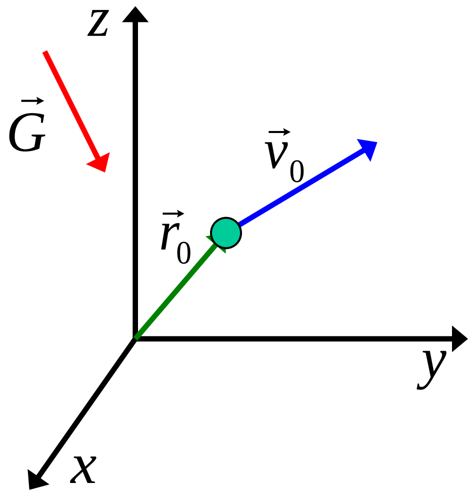
$$\left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] = m\left(\left[\vec{v} \times \vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]\right) = \left[\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]$$

Pohybové rovnice

zákon síly	**počáteční podmínky**	**časová závislost souřadnic / rychlosti**	
$\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$x(t = t_0) = x_0$	$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{F_x}{m}$	$x(t)$
	$y(t = t_0) = y_0$	$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{F_y}{m}$	$y(t)$
$a_x = \dfrac{F_x}{m}$	$z(t = t_0) = z_0$	$\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{F_z}{m}$	$z(t)$
$a_y = \dfrac{F_y}{m}$	$v_x(t = t_0) = v_{x_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{F_x}{m}$	$v_x(t)$
	$v_y(t = t_0) = v_{y_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{F_y}{m}$	$v_y(t)$
$a_z = \dfrac{F_z}{m}$	$v_z(t = t_0) = v_{z_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{F_z}{m}$	$v_z(t)$

Šikmý vrh obecně



Tíha:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = \left(g_x, g_y, g_z\right)$$

Počáteční podmínky:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$$

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right)$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = g_i, \quad i = x, y, z$$

Řešení:

$$v_i(t) = g_i t + c_i$$

$$v_i(t_0) = g_i t_0 + c_i \Rightarrow c_i = v_{0i} - g_i t_0$$

rychlost:

$$v_i = g_i(t - t_0) + v_{0i}$$

$$v_i(t) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = g_i(t - t_0) + v_{0i}$$

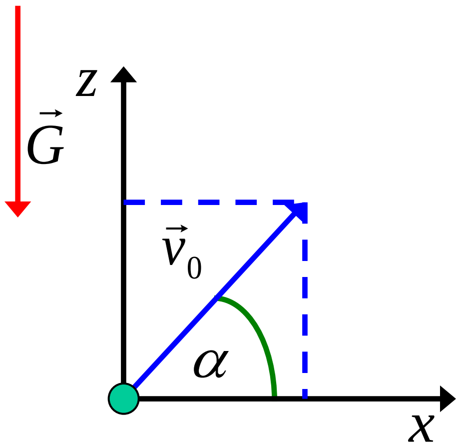
poloha:

$$x = \tfrac{1}{2} g_x (t - t_0)^2 + v_{0x}(t - t_0) + x_0$$

$$y = \tfrac{1}{2} g_y (t - t_0)^2 + v_{0y}(t - t_0) + y_0$$

$$z = \tfrac{1}{2} g_z (t - t_0)^2 + v_{0z}(t - t_0) + z_0$$

Šikmý vrh



Tíha:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad \vec{g} = (0,0,-g)$$

Pohybové rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g$$

Počáteční podmínky:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (0,0,0)$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z})$$

Řešení:

$$v_x(t) = c_x, \quad v_z(t) = -gt + c_z$$

$$v_x(0) = c_x \Rightarrow c_x = v_{0x}$$

$$v_z(0) = c_z \Rightarrow c_z = v_{0z}$$

Rychlost:

$$v_x = v_{0x}, \quad v_z = -gt + v_{0z}$$

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{0x}, \quad v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt + v_{0z}$$

poloha: $x = v_{0x}t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

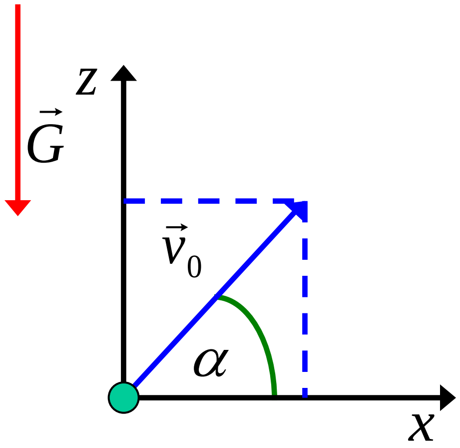
$$z = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

trajektorie:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0z} = v_0 \sin\alpha$$

$$z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$$

Šikmý vrh



Místo dopadu: $z = 0, \quad t = t_D$

$$z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha, \quad x = v_0 t \cos\alpha$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} g t_D{}^2 + v_0 t_D \sin\alpha \Rightarrow t_D = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_D = v_0 t_D \cos\alpha = \frac{2 v_0{}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Poloha maxima: $v_z = 0, \quad t = t_M$

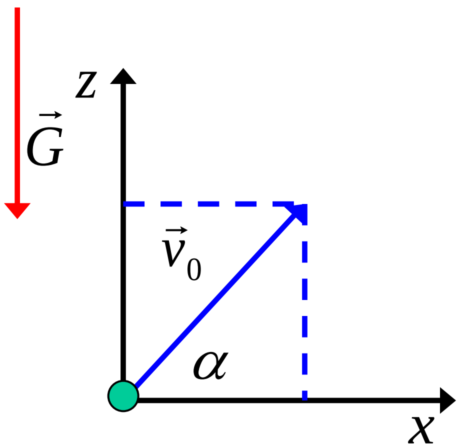
$$v_z = -g t + v_0 \sin\alpha$$

$$0 = -g t_M + v_0 \sin\alpha \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$x_M = v_0 t_M \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$z_M = -\tfrac{1}{2} g t_M{}^2 + v_0 t_M \sin\alpha = -\tfrac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Šikmý vrh



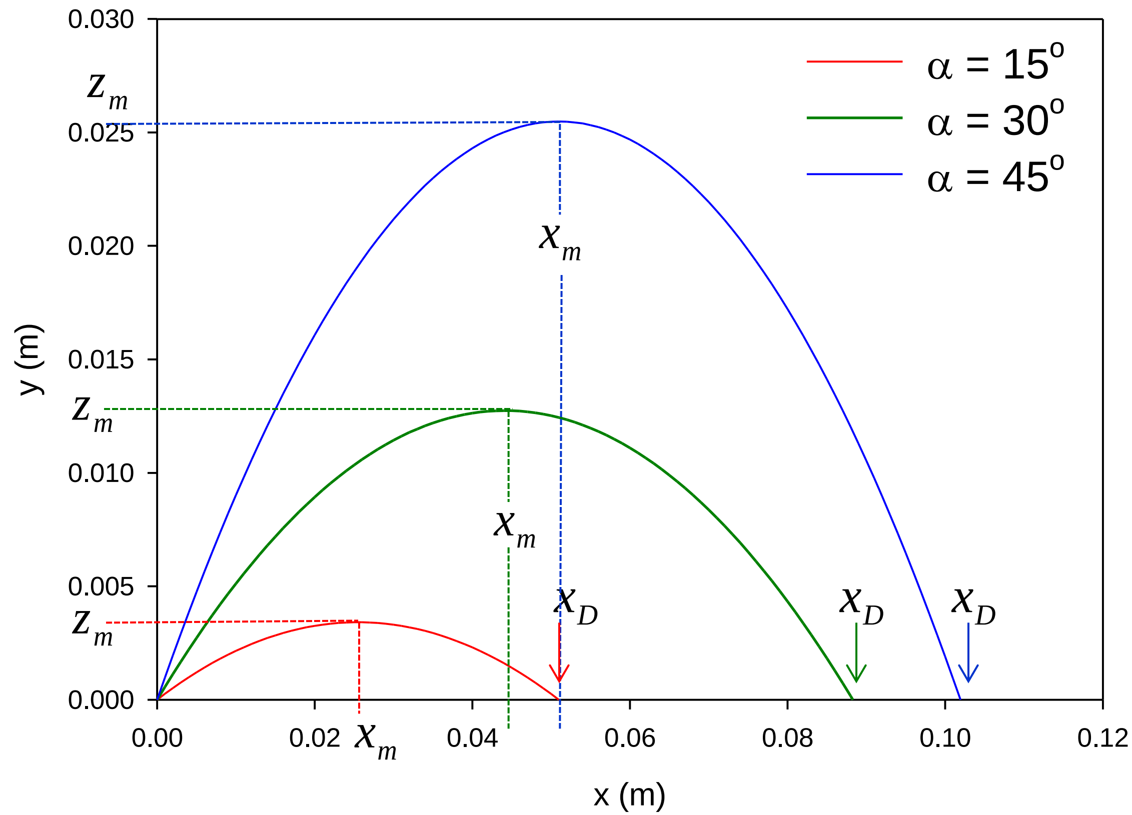
trajektorie:

$$z = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

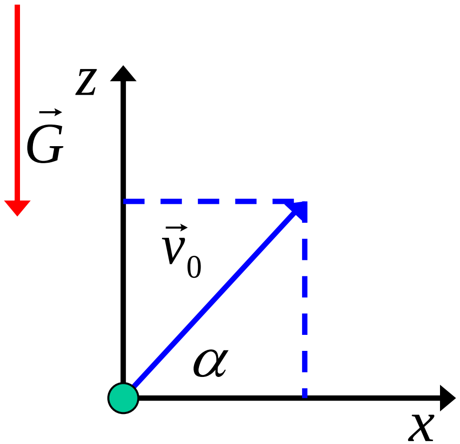
místo dopadu: $x_D = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

poloha maxima: $x_M = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$

výška maxima: $z_M = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

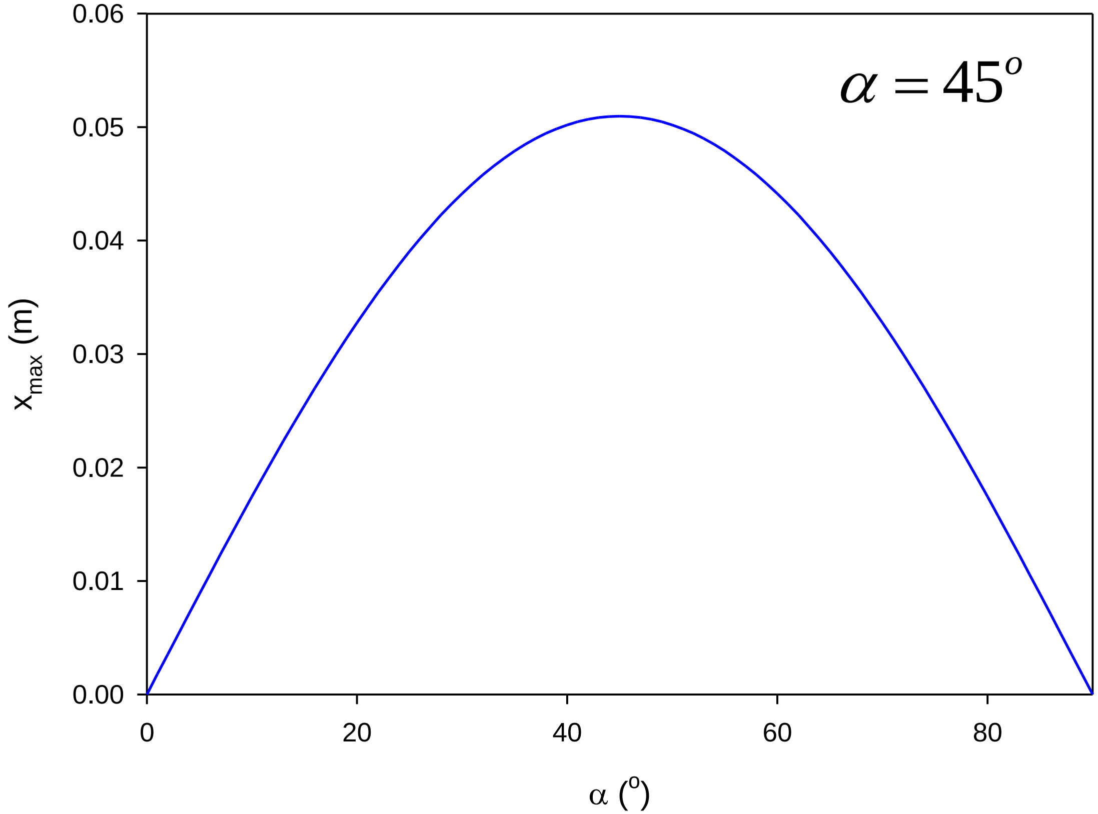


Šikmý vrh



$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$$

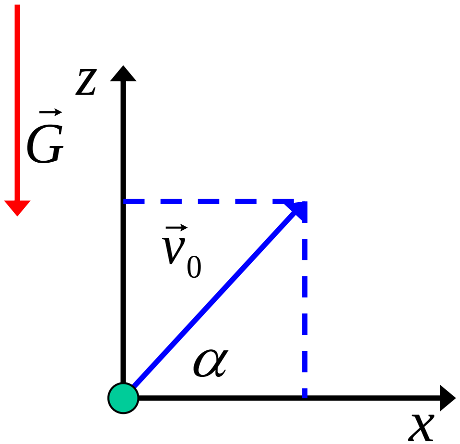
$$v_0 = 1\,\mathrm{ms}^{-1}$$



$$\frac{\mathrm{d}x_{\max}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{v_0^2\, 2\cos(2\alpha)}{2g} = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Šikmý vrh

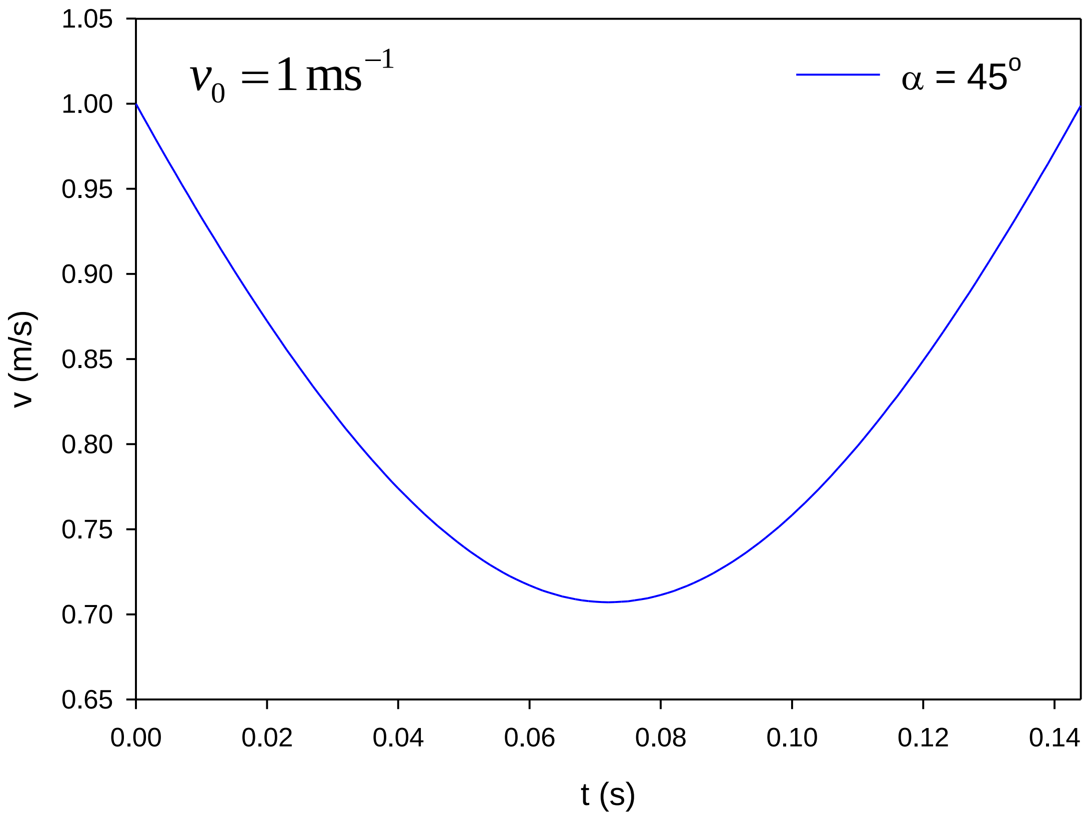


Velikost rychlosti:

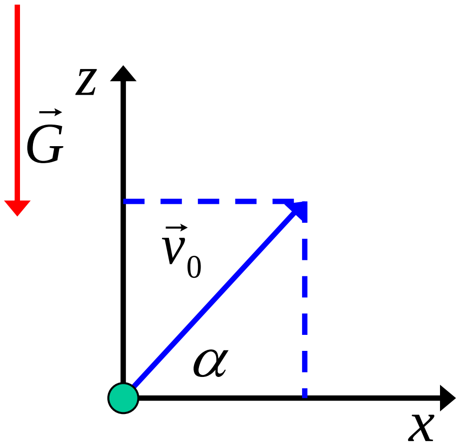
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}$$

Rychlost:

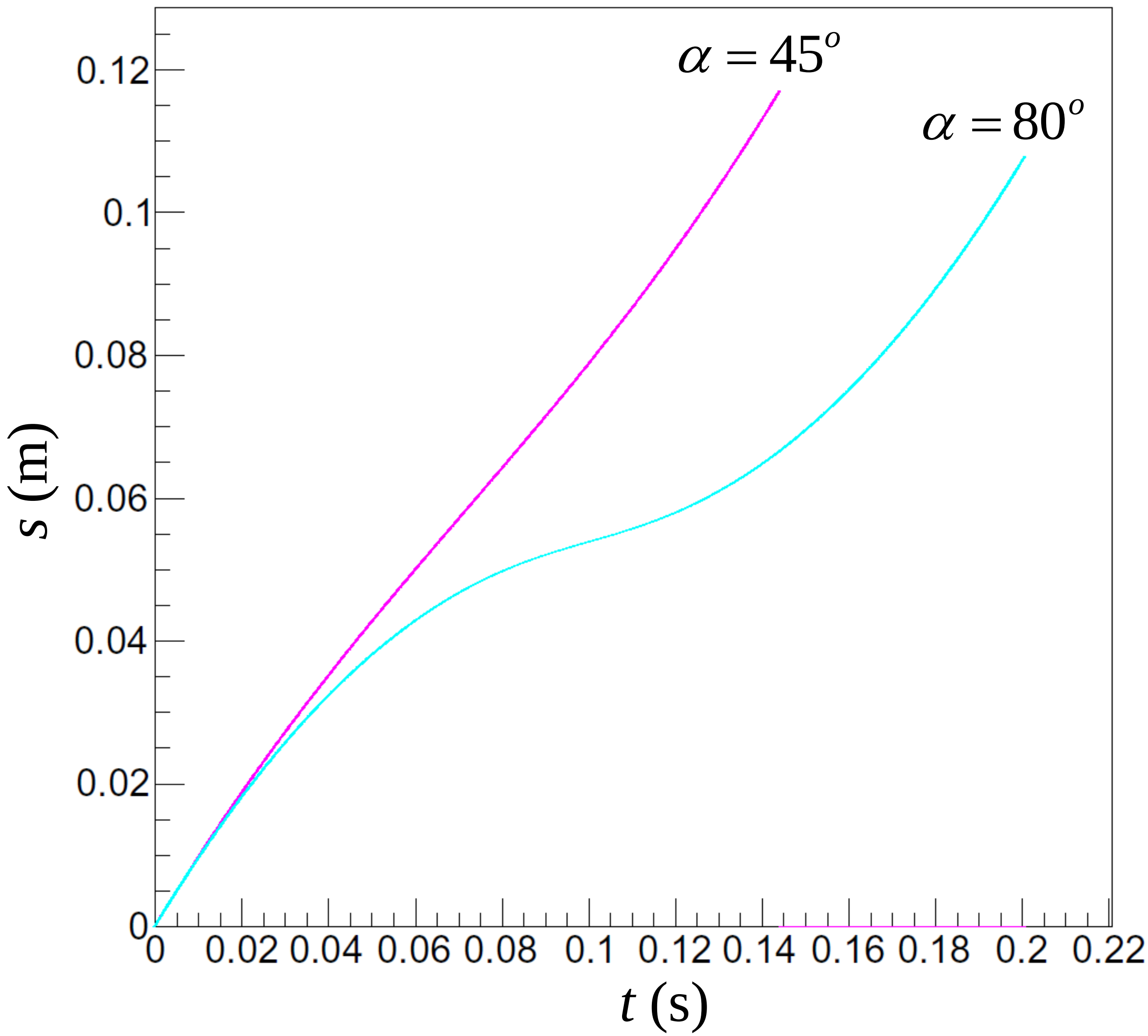
$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$$



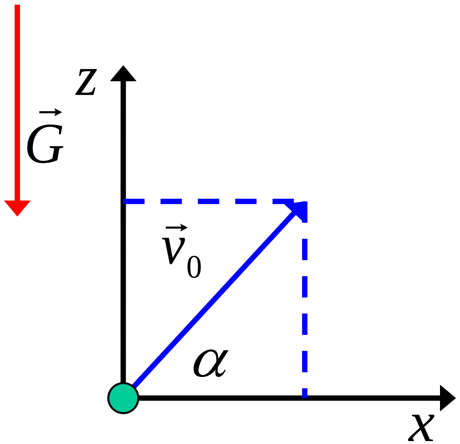
Šikmý vrh



$$s \equiv \int v(t)\mathrm{d}t$$

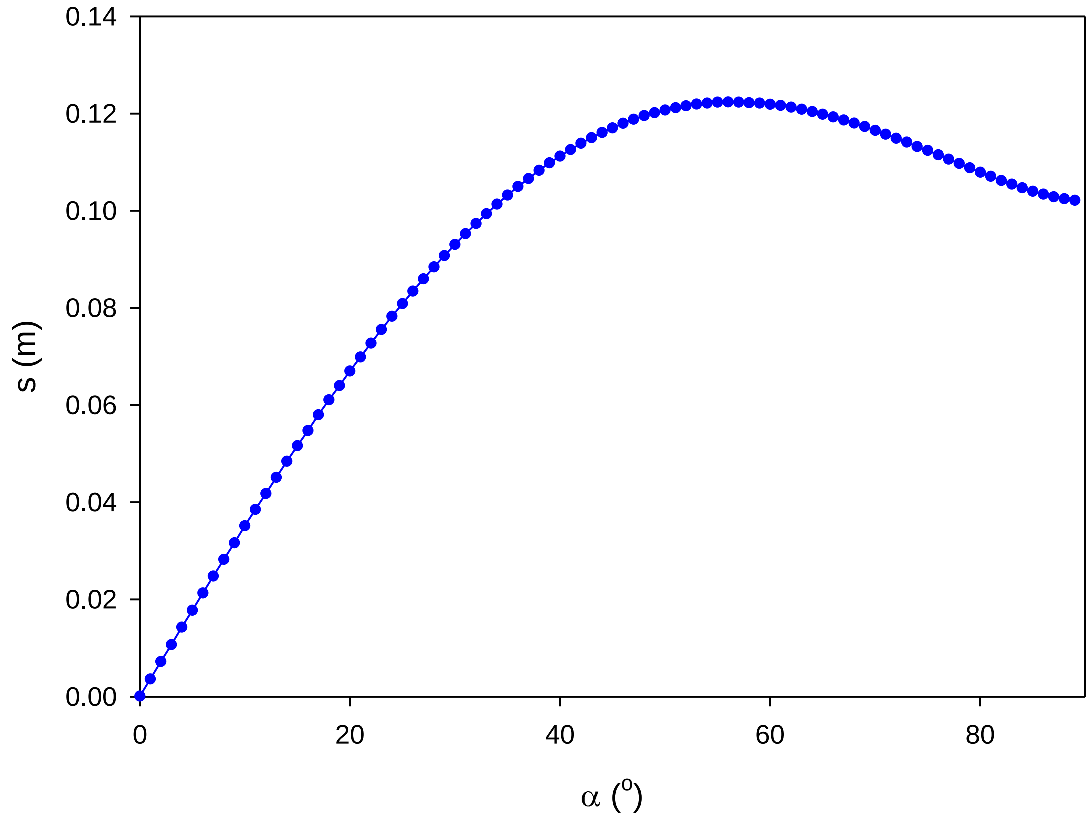


Šikmý vrh

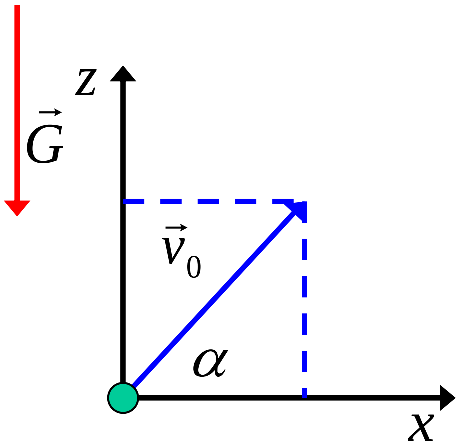


$$s = \int_0^{\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}} \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}\, \mathrm{d}t$$

$$s \equiv \int v(t)\mathrm{d}t$$

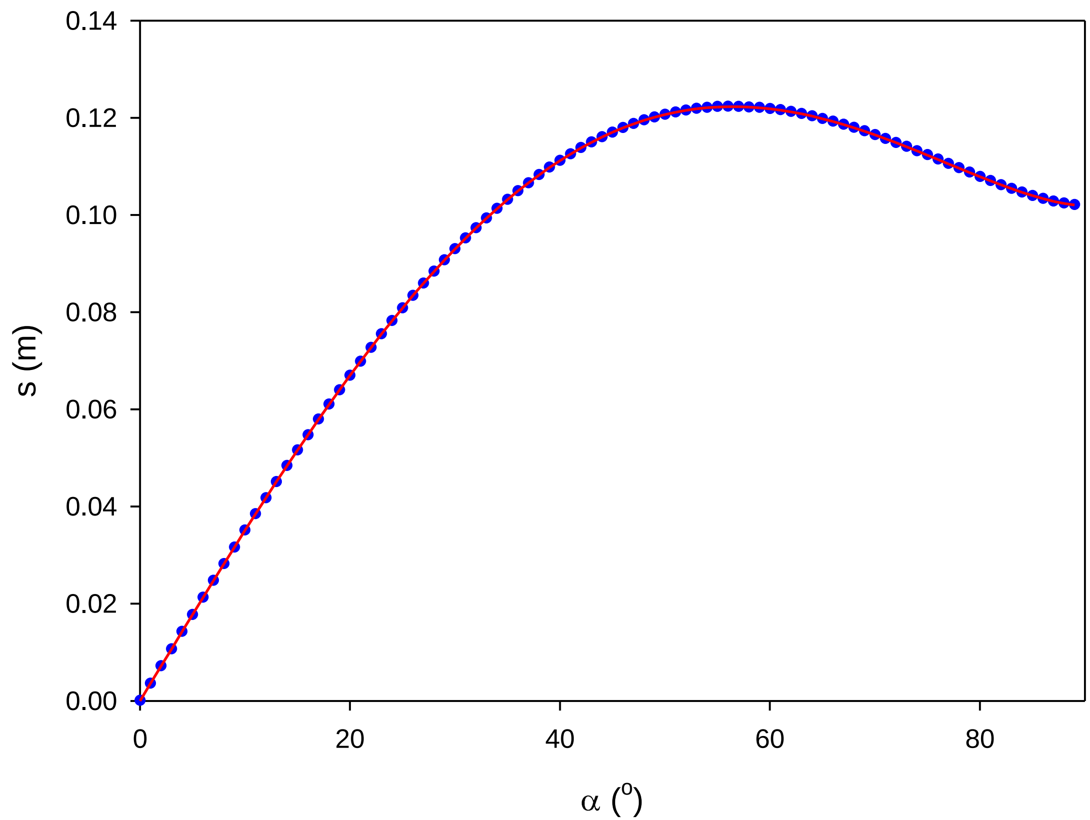


Šikmý vrh



$$s = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin\alpha + \cos^2\alpha \ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$s \equiv \int v(t)\,\mathrm{d}t$$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh bez odporu vzduchu

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

počáteční podmínky

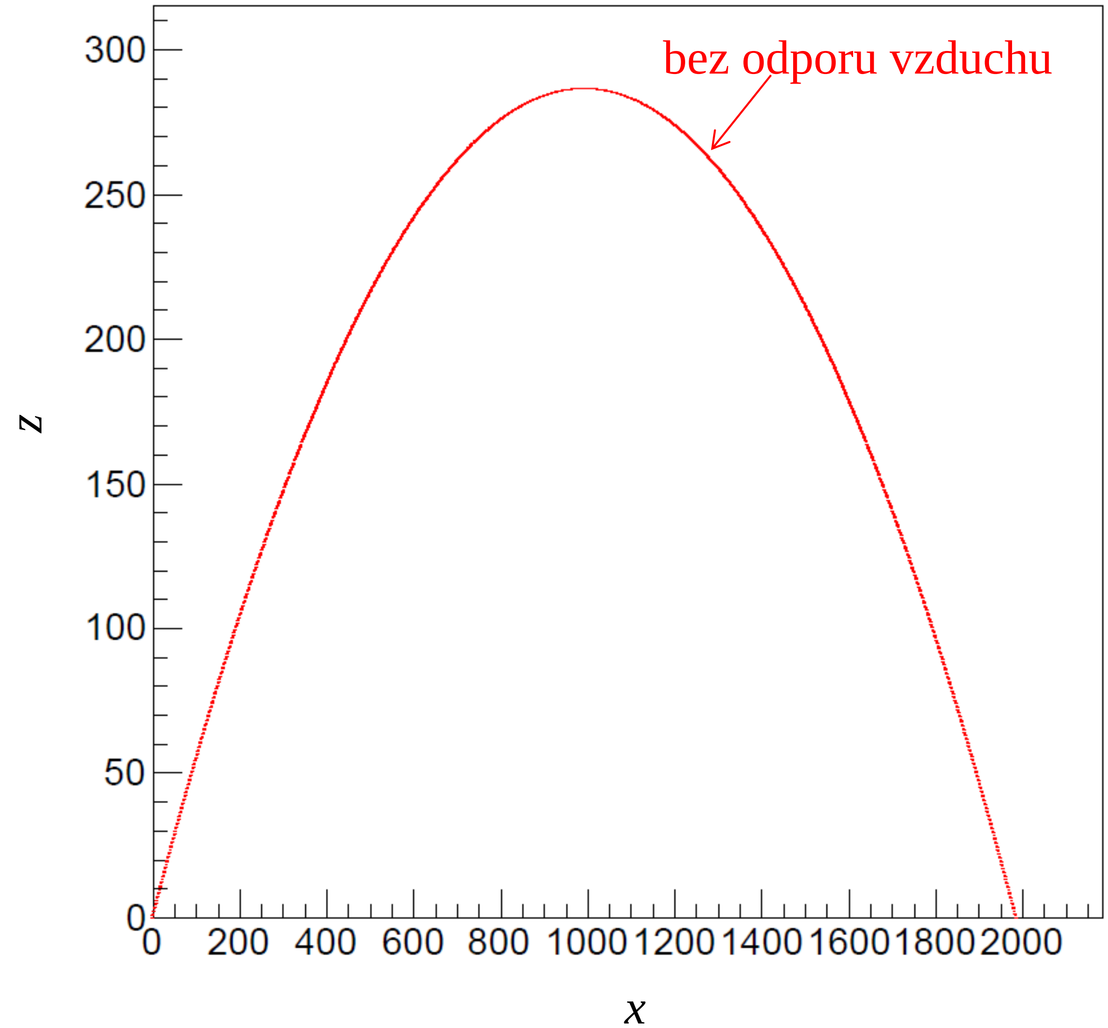
$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$

m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -h\vec{v}$ m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-4} Ns/m

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -h\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}$$

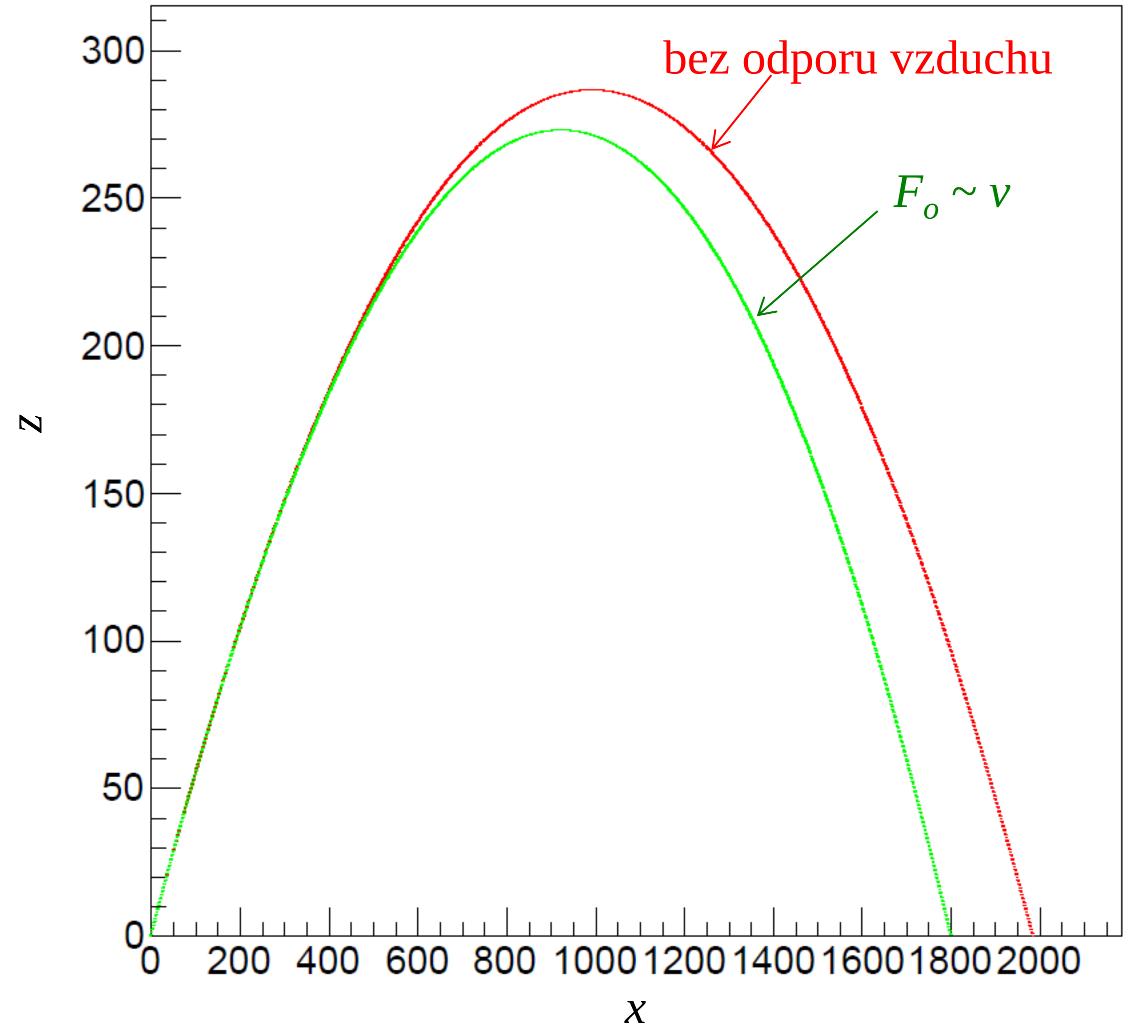
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

Šikmý vrh s odporem vzduchu $\vec{F}_o = -hv^2 \frac{\vec{v}}{v}$

m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-5} Ns/m

pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -h\dot{x}^2$$

$$m\ddot{z} = -mg - h\dot{z}^2$$

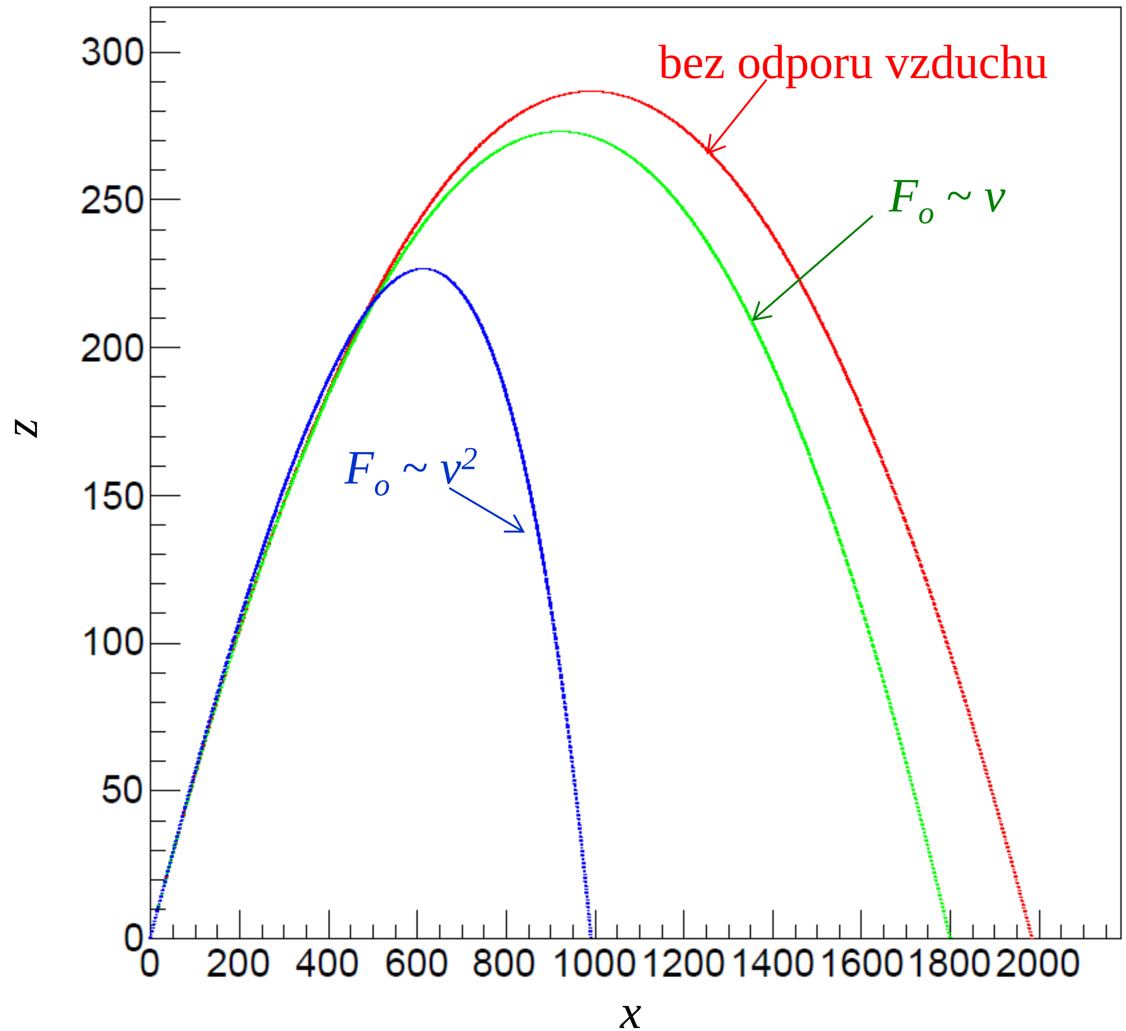
počáteční podmínky

$$x(t=0) = 0$$

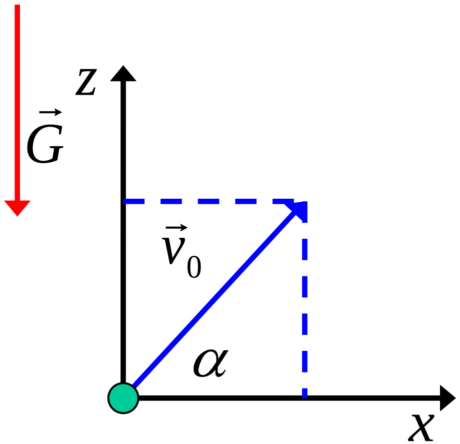
$$z(t=0) = 0$$

$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha$$



Šikmý vrh

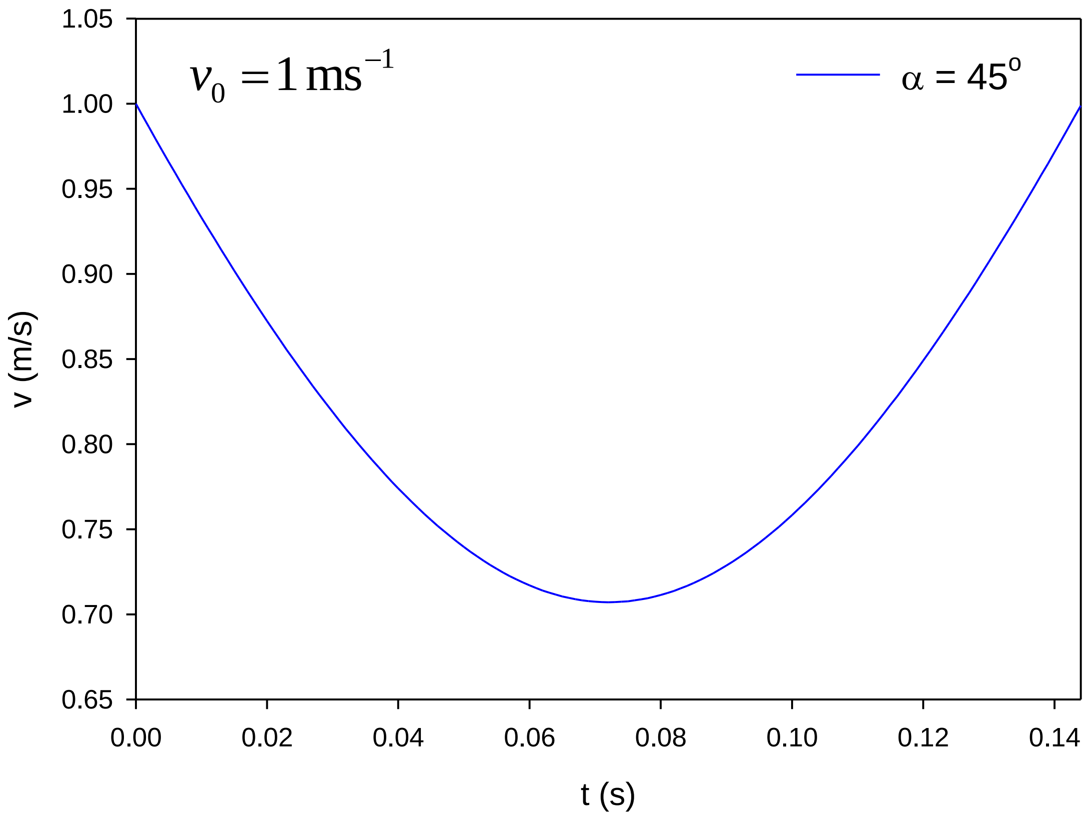


Velikost rychlosti:

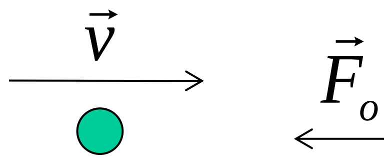
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{(v_0)^2 + (gt)^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}$$

Rychlost:

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$$



Odporová síla vzduchu



- **odporová síla**

průřez tělesa

$$F_o = \frac{1}{2}\rho S C_d v^2$$

- **Reynoldsovo číslo**

$$\mathrm{Re} = \frac{v L \rho}{\mu}$$

v - rychlost

L - charakteristický rozměr tělesa

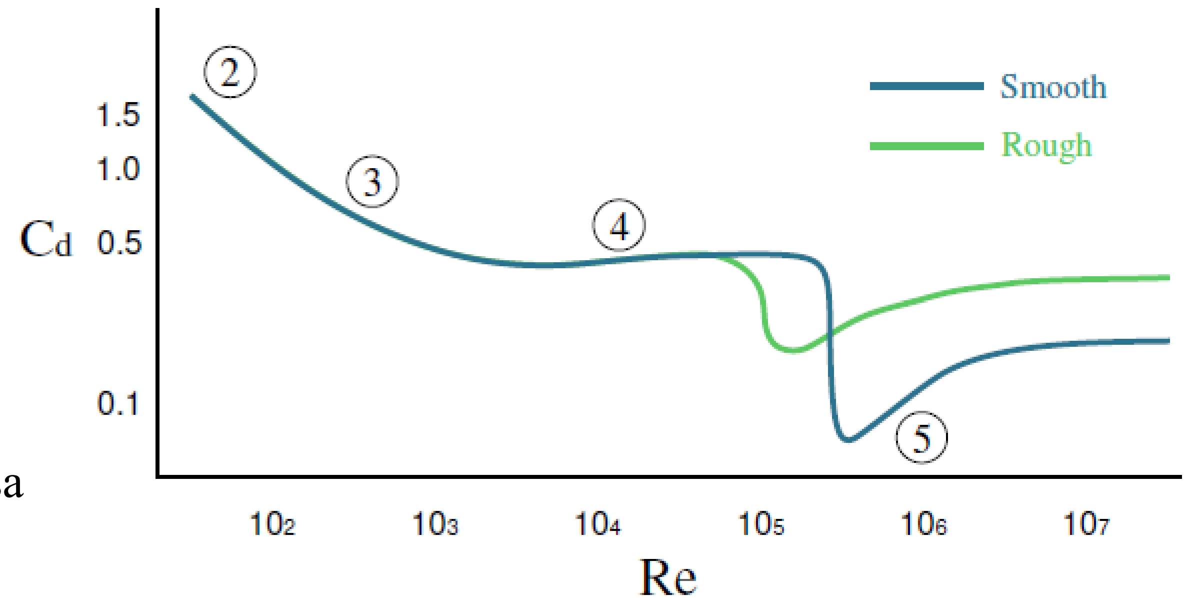
ρ - hustota prostředí

μ - viskozita prostředí (vzduch $\mu = 2\times10^{-5}$ Pa s)

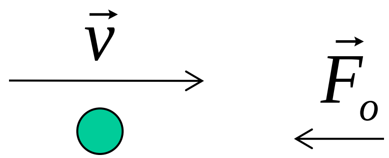
- **součinitel odporu C_d**

- malé Re < $10^2 \rightarrow C_d \sim 1/v$ $\qquad F_o \sim v$

- $10^2 <$ Re $< 10^5 \rightarrow C_d \sim$ konst. $\qquad F_o \sim v^2$

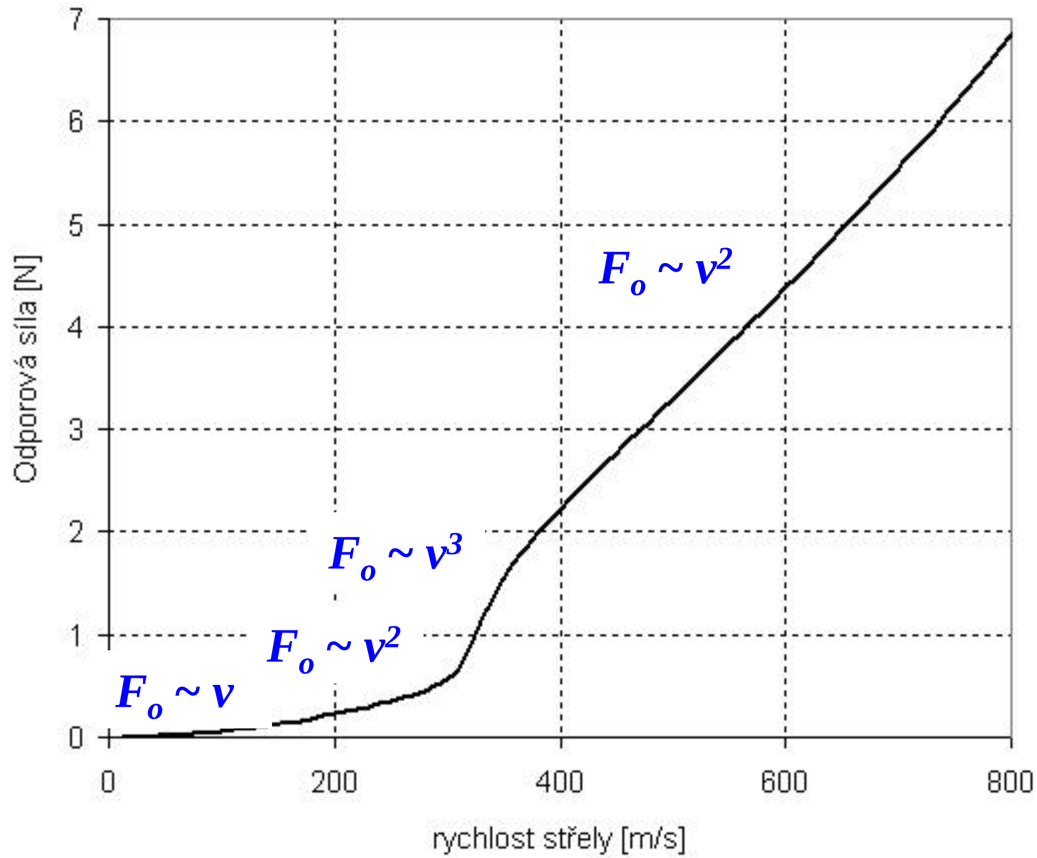


Odporová síla vzduchu

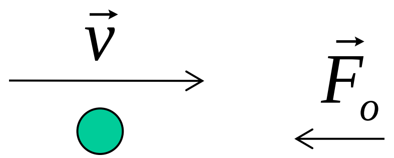


- **odporová síla**

$$F_o = \frac{1}{2}\rho S C_d v^2$$



Odporová síla vzduchu



$$v \le v_c \quad \Rightarrow \quad F_o = hv$$

$$v > v_c \quad \Rightarrow \quad F_o = av^2 + b$$

$$v_c \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

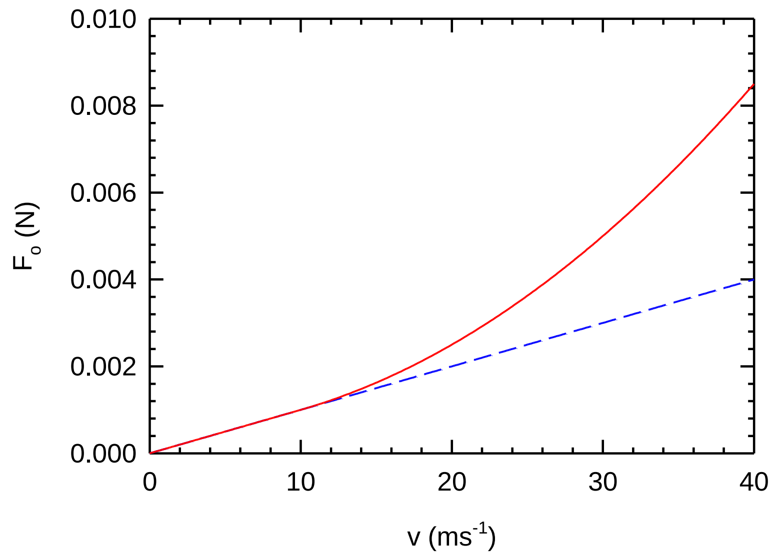
spojitost F_o a její derivace

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{h}{2v_c} \qquad b = \frac{hv_c}{2}$$

$h = 10^{-4}$ Ns/m

$a = 5\times10^{-6}$ Ns^2/m^2, $b = 5\times10^{-4}$ N



Pohybové rovnice – numerické řešení – šikmý vrh s odporem vzduchu

m = 10 g, v_0 = 150 m/s, α = 30°, h = 10^{-4} Ns/m